Kolokwium poprawkowe
z Matematyki Obliczeniowej, II rok Mat.

(*Ściśle tajne* przed godz. 14:00 30 maja 2023.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Bardzo duży wpływ na ocenę będzie miała czytelność rozwiązań i poprawność uzasadnienia każdej odpowiedzi.

1. Do znalezienia miejsca zerowego funkcji $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x-1)e^x$ została użyta metoda Newtona. Dla jakich punktów początkowych metoda ta będzie zbieżna do punktu $x^* = 1$?
2. Punktem stałym funkcji $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3}(2x + \frac{c}{x^2})$ dla ustalonego $c \in \mathbb{R}$ jest $x^* = \sqrt[3]{c}$. Napisz wyrażenie, którego wartość zostanie obliczona w arytmetyce zmiennopozycyjnej (przy założeniu że nie ma nadmiaru ani niedomiaru) podczas obliczania $\varphi(\mathrm{rd}(x^*))$ i przekształć to wyrażenie do postaci $x^*(1+\gamma)$, gdzie $|\gamma| \leqslant K\nu$ ($\nu = 2^{-t}$, gdzie t jest liczbą mantysy) a następnie znajdź oszacowanie liczby K.
3. Metodą Choleskiego znajdź macierz trójkątną dolną L, taką że $A = LL^T$, dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 & 8 \\ 8 & 17 & 26 & 19 \\ 12 & 26 & 41 & 32 \\ 8 & 19 & 32 & 33 \end{bmatrix}.$$

   Dopuszczalna alternatywa: znajdź macierz trójkątną dolną L ze współczynnikami diagonalnymi równymi 1 i macierz diagonalną D, takie że $A = LDL^T$.
4. Dla ustalonego $n \geqslant 2$ rozważamy funkcję $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, daną wzorem

$$f(A) = \max_{i,j\in\{1,\dots,n\}} |a_{ij}|.$$

   a) Udowodnij, że funkcja f jest normą na przestrzeni $\mathbb{R}^{n\times n}$.
   b) Czy jest prawdą, że dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest spełniona nierówność $f(AB) \leqslant f(A)f(B)$?
   c) Udowodnij, że funkcja f nie jest normą indukowaną przez żadną normę w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.